11.12.

Příklady:

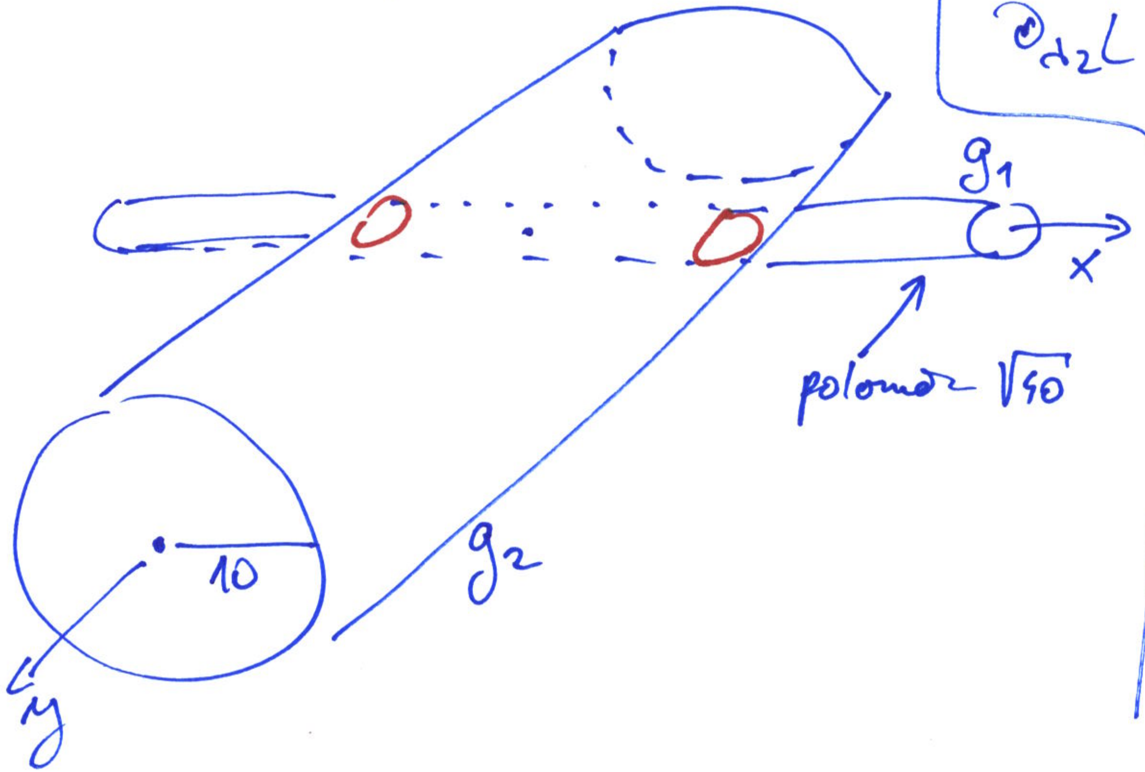
Určete extrémy fce

$$f(x,y,z) = 4x - y \quad \text{s vazbami}$$

$$g_1(x,y,z) = y^2 + z^2 - 40 = 0$$

$$g_2(x,y,z) = x^2 + z^2 - 100 = 0$$

Průnik 2 válcových ploch:



Nejprve metodou LM:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 4x - y + \lambda_1(y^2+z^2-40) + \lambda_2(x^2+z^2-100)$$

$$\partial_x L = 4 + 2\lambda_2 x = 0 \qquad (1)$$

$$\partial_y L = -1 + 2\lambda_1 y = 0 \qquad (2)$$

$$\partial_z L = 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z = 0 \qquad (3)$$

$$\partial_{\lambda_1} L = y^2 + z^2 - 40 = 0 \qquad (4)$$

$$\partial_{\lambda_2} L = x^2 + z^2 - 100 = 0 \qquad (5)$$

Začneme s rovnicí (3):

$$2z(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

Výhodný tvar!

$$\left[\, a \cdot b = 0 \Rightarrow \text{buď } a = 0 \text{ nebo } b = 0 \,\right]$$

$$\Rightarrow 2 \text{ možnosti} \Rightarrow \begin{cases} a)\ z = 0 \\ b)\ (\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

1

a) $z=0$ ... dosadíme do (4),(5):

(4) $y^2+0^2-40=0$

$y^2=40$

$\boxed{y=\pm\sqrt{40}}$

(5) $x^2+0^2-100=0$

$x^2=100$

$\boxed{x=\pm 10}$

nezávislé znaménka

$\Rightarrow$ 4 kandidáti:

$A=[10,\sqrt{40},0]$

$B=[10,-\sqrt{40},0]$

$C=[-10,\sqrt{40},0]$

$D=[-10,-\sqrt{40},0]$

---

b) $d_1+d_2=0 \iff d_1=-d_2$

Nyní můžeme použít rovnice (1) a (2):

(1) $2d_2x=-4$

$d_2=-d_1$

$\boxed{x=\frac{-4}{2d_2}=\frac{-2}{d_2}=\frac{2}{d_1}}$

(2) $2d_1y=1$

$\boxed{y=\frac{1}{2d_1}}$

Obě proměnné (x,y) máme tedy vyjádřené pomocí d_1; navíc vidíme, že $d_1\neq 0$ ((2): $-1=0$ ... nejde)

Dále: je možné tyto dva vztahy dosadit do (4) a (5), získali bychom tak 2 rovnice o 2 neznámých (d_1, z), což by šlo dopočítat. (DÚ - sami!)

Ale my si všimneme, že:

$x = \frac{2}{\lambda_1}$, $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_1}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 4y}$ a toto

dosadíme do (5):

$x^2 + z^2 = 100$

dosad.: $(4y)^2 + z^2 = 100$

$16y^2 + z^2 = 100$

ještě (4): $y^2 + z^2 = 40$

odečteme je od sebe:

$15y^2 = 60 \quad /:15$

$y^2 = 4$

$\boxed{y = \pm 2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = \pm 8}$ závislá znaménka

a dopočteme z:

(4) $4 + z^2 = 40$

$z^2 = 36 \quad /\sqrt{\ }$

$\boxed{z = \pm 6}$

znaménko u z je nezávislé na znaménkách u x, y

$\Rightarrow$ máme $2 \times 2 = 4$ kandidáty:

$E = [8, 2, 6]$

$F = [8, 2, -6]$

$G = [-8, -2, 6]$

$H = [-8, -2, -6]$

Dosadíme vše do f:

$f(A) = 40 - \sqrt{40} \doteq 34$

$f(B) = 40 + \sqrt{40} \doteq 46$ MAX

$f(C) = -40 - \sqrt{40} \doteq -46$ MIN

$f(D) = -40 + \sqrt{40} \doteq -34$

$f(E) = f(F) = 30$

$f(G) = f(H) = -30$

3

Totéž metodou jacobiánu:

$$f = 4x - y$$
$$g_1 = y^2 + z^2 - 40 = 0$$
$$g_2 = x^2 + z^2 - 100 = 0$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

$$\det J = 4 \cdot 2y \cdot 2z + (-1) \cdot 2z \cdot 2x + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2y \cdot 2x - 0 \cdot 2z \cdot 4 - 0 \cdot (-1) \cdot 2z = 4z(4y - x)$$

1. rovnice soustavy: $4z(4y-x)=0$

$\Rightarrow$ 2 možnosti $\left\langle \begin{array}{l} a)\ z=0 \\ b)\ x=4y \end{array} \right\}$ totéž jako u LM

Na závěr – ještě jeden příklad na průběh fce 1 proměnné

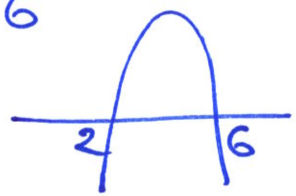
$$f(x) = \log_2(-x^2+8x-12)$$

víme: $f(x) = \dfrac{\ln(-x^2+8x-12)}{\ln 2}$

a $\ln 2 \doteq 0{,}7$ (konstanta!)

1. D_f: musí být $-x^2+8x-12>0$

kořeny kvadr. fce: 2, 6



$D_f = (2, 6)$

a proto f nemůže být sudá ani lichá (nesymetrický D_f)

② průsečíky s osami:

P_y není $(0 \notin D_f)$

P_x: $\log_2(-x^2+8x-12)=0$

$\Leftrightarrow \quad -x^2+8x-12=1$

$\Leftrightarrow \quad -x^2+8x-13=0$

$D = 64-4\cdot(-1)\cdot(-13) =$

$= 64-52 = 12$

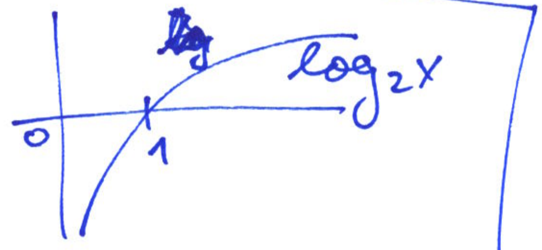
$x_{1,2} = \dfrac{-8\pm\sqrt{12}}{-2} = 4\pm\sqrt{3}$

ozn. $\left.\begin{array}{l} x_1 = 4-\sqrt{3} \doteq 2{,}3 \\ x_2 = 4+\sqrt{3} \doteq 5{,}7 \end{array}\right\} \in D_f$

tedy P_x jsou x_1 a x_2

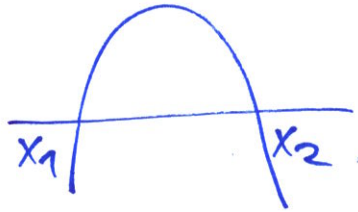
Kdy je $f > 0 \,/\, < 0$?

$f(x) > 0 \ldots \log_2(-x^2+8x-12) > 0$



$\Leftrightarrow -x^2+8x-12 > 1$

$-x^2+8x-13 > 0$



$\Rightarrow f(x) > 0$ v (x_1, x_2)

$f(x) < 0$ v $(2, x_1)$ a v $(x_2, 6)$

③ limity v krajních bodech D_f:

$\lim\limits_{x\to 2+} \log_2(-x^2+8x-12) = ?$

víme $x \to 2+ \Rightarrow -x^2+8x-12 \to 0+$

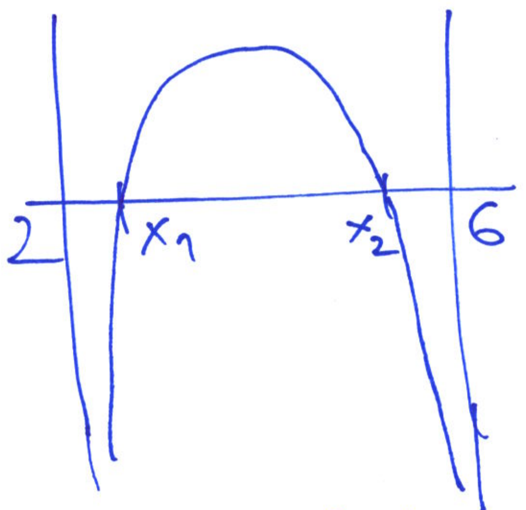
a víme $\lim\limits_{y\to 0+} \log_2 y = \lim\limits_{y\to 0+} \dfrac{\ln y}{\ln 2} = \dfrac{-\infty}{\ln 2} =$

$\boxed{\text{Protože } \ln 2 > 0 \text{ !}} \longrightarrow = -\infty$

5

Stejně vyjde $\lim\limits_{x\to 6-} f(x) = -\infty$

4) předběžný graf:



5) $f'(x) = \left(\dfrac{\ln(-x^2+8x-12)}{\ln 2}\right)' =$

$= \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{-2x+8}{-x^2+8x-12}$ pro $\forall x \in D_f$

6) stac. body: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -2x+8 = 0$

$\underline{\underline{x = 4}} \Rightarrow V_f = \{2, 4, 6\}$

7) $f(4) = \log_2(-16+32-12) =$

$= \log_2 4 = 2$

$\Rightarrow$ tabulka

$x \in V_f$	2	4	6
$f(x)$ či $\lim f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$
	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow$ bod $[4, 2]$ je glob. max.

a $H_f = (-\infty, 2\rangle$

8) asymptoty:

v $\pm\infty$ nejsou ($D_f = (2,6)$!)

jsou svislé as. ve 2

a v 6 (protože

$\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to 6-} f(x)$)

⑨ $f''(x) = \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{-2x+8}{-x^2+8x-12}\right)' =$

$= \frac{1}{\ln 2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{x-4}{x^2-8x+12}\right)' =$

$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{1 \cdot (x^2-8x+12) - (x-4) \cdot (2x-8)}{(x^2-8x+12)^2} =$

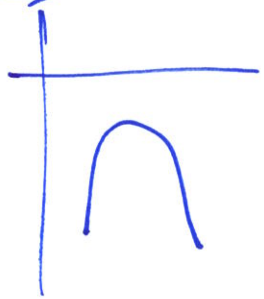
$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{x^2-8x+12-2x^2+16x-32}{(x^2-8x+12)^2} =$

$= \underbrace{\frac{2}{\ln 2}}_{>0} \cdot \frac{-x^2+8x-20}{\underbrace{(x^2-8x+12)^2}_{>0}}$

čitatel: $D = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-20) =$
$= 64 - 80 = -16 < 0$

a u x^2 je záporné číslo $\Rightarrow$

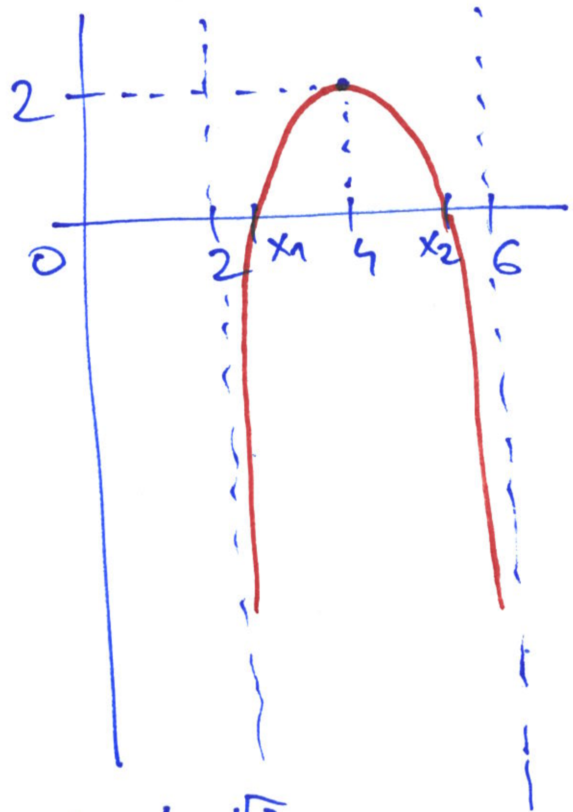
$\Rightarrow$ čitatel je celý záporný pro $\forall x \in \mathbb{R}$



$\Rightarrow f''(x) < 0$ v celém D_f

$\Rightarrow f$ konkávní v D_f

⑩ graf:



$x_1 = 4 - \sqrt{3}$
$x_2 = 4 + \sqrt{3}$